

CHAPITRE 5

TRAITEMENT NUMERIQUE DES SIGNAUX ALEATOIRES

Steven L. Kay, ingénieur électricien américain, professeur de traitement du signal à l'université de Rhodes Island. Spécialiste en statistique mathématique en liaison avec le traitement du signal, il est l'auteur d'un ouvrage de référence dans le domaine de la détection de signaux (*Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Prentice Hall), dont on trouve dans tous les domaines du traitement du signal. Membre d'honneur de l'IEEE pour sa contribution à la détection et à l'estimation spectrale paramétrique



Les signaux étudiés jusqu'ici possèdent une forme simple, dont on peut rendre compte sous forme analytique. L'utilisation pratique de tels signaux est assez restreinte : elle touche principalement les cas où l'ingénieur contrôle le type des signaux se manifestant dans un système, parce qu'il en assure la *synthèse* (par exemple dans le cas du signal émis par un radar ou un sonar ou dans le cas des sons ou des images de synthèse). A contrario il est rare que les signaux naturels, résultant de causes multiples et souvent incontrôlables et non mesurables, puissent être caractérisés par une expression analytique simple. C'est le cas par exemple des signaux reçus par un sonar ou un radar, de la parole, de l'électrocardiogramme, de l'électro-encéphalogramme, des signaux géodésiques ou encore des signaux boursiers étudiés par les économistes (Fig. 5.1). On les qualifie alors d'*aléatoires*, par opposition aux premiers que l'on qualifie de *déterministes*¹.

¹ En réalité, le qualificatif de *déterministe* ou *aléatoire* n'est pas vraiment une caractéristique des signaux (qui sont tous fondamentalement déterministes) mais plutôt du degré de connaissance (ou de l'ignorance) que nous en avons. Tout ce qui sera dit ici sur les signaux « aléatoires » est donc applicable a fortiori aux signaux « déterministes ».

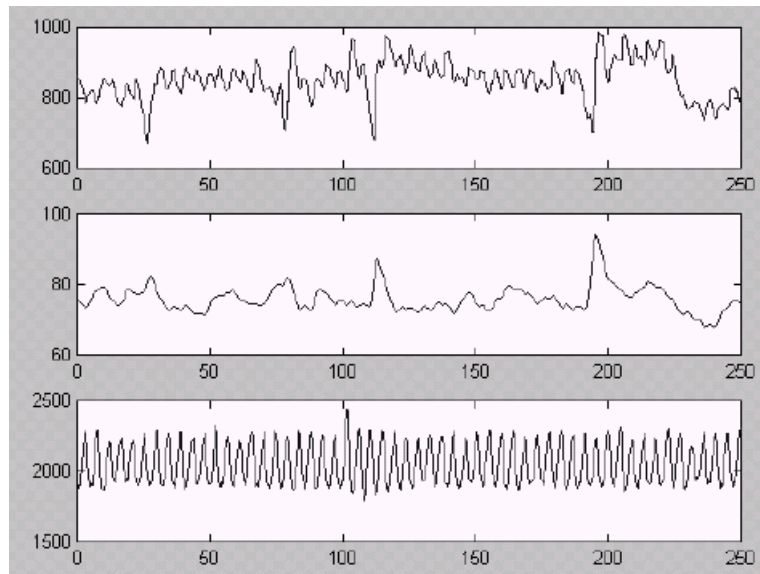


Fig. 5.1 Exemples de signaux bio-médicaux.
Haut : intervalles entre les battement du cœur (ms) ;
Centre : Pression artérielle moyenne (mm Hg);
Bas : Volume respiratoire.

Après un rappel sur les variables aléatoires et une application importante à la quantification uniforme des signaux (5.1), nous examinerons les propriétés théoriques des signaux aléatoires : moyenne, variance, densité de probabilité, autocorrélation et densité spectrale de puissance (5.2). Nous poursuivrons en considérant le filtrage d'un signal aléatoire et montreront comment les propriétés de ces signaux s'en trouvent modifiées (6). Nous étudierons pour terminer divers estimateurs de ces grandeurs à partir des signaux aléatoires eux-mêmes. Une difficulté fréquente résulte de ce que les enregistrements disponibles de ces signaux sont souvent de durée limitée, soit par manque réel de données, soit par manque de stationnarité du signal, ou encore par soucis de limiter le volume de calcul; il faut en général accepter un *compromis entre la résolution et la précision* de l'estimation (5.4).

5.1 Variables aléatoires

5.1.1 Rappel théorique

Une variable aléatoire continue X est complètement caractérisée par sa fonction de *densité de probabilité* $p_X(x)$ qui permet le calcul de la probabilité que X appartienne à l'intervalle (a,b) :

$$P(X \in (a,b)) = \int_a^b p_X(x) dx \quad (5.1)$$

Il est équivalent de spécifier sa *fonction de répartition* $F_X(x)$, qui est l'intégrale de la fonction de densité de probabilité :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\chi) d\chi \quad (5.2)$$

On caractérise souvent (et souvent de façon incomplète) une variable aléatoire par sa *moyenne* m_X et sa *variance* σ_X , définies par :

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad (5.3)$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx \quad (5.4)$$

De façon similaire, on caractérise complètement la relation statistique entre deux variables aléatoires continues X et Y par une *densité de probabilité conjointe* $p_{XY}(x, y)$ telle que :

$$P(X \in (a, b), Y \in (c, d)) = \int_a^b \int_c^d p_{XY}(x, y) dx dy \quad (5.5)$$

On caractérise souvent cette relation de façon plus simple (et souvent incomplète) par la *covariance* $\text{cov}(X, Y)$ entre X et Y , ou par sa valeur normalisée entre -1 et 1 , la *corrélation* $\rho(X, Y)$:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \quad (5.6)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X \sigma_Y}} \quad (5.7)$$

En particulier, deux variables sont dites *indépendantes* ssi la valeur prise lors du tirage aléatoire de la première n'a aucune influence sur le tirage de la seconde :

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \quad (5.8)$$

Elle sont dites *non corrélées* ssi :

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \quad (5.9)$$

On montre que deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées, mais qu'en général la réciproque est fautive. La propriété (5.8) doit en effet être vérifiée pour tout x et y , alors que (5.9) est une propriété plus globale.

Comme les variables déterministes, les variables aléatoires possèdent une algèbre. L'opération la plus simple est la somme Y de deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 . Le résultat est bien entendu également une variable aléatoire, et sa densité de probabilité est facile à obtenir : la probabilité d'une valeur particulière y de Y est bien entendu la somme (continue) des probabilités de chaque paire de valeurs particulières $(x_1, y - x_1)$ dont la somme donne y . Si les variables sont indépendantes, la probabilité de chaque paire est donnée par le produit des probabilités de leurs éléments, et on trouve tout naturellement que la densité de probabilité de Y est le produit de convolution des densités de probabilité initiales :

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(x) p_{X_2}(y - x) dx \quad (5.10)$$

$$p_Y(y) = p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x)$$

Exemple 5.1 - Variable aléatoire à distribution uniforme sur $(-q/2, q/2)$

Cette v.a. est caractérisée par une densité de probabilité constante (Fig. 5.2) .

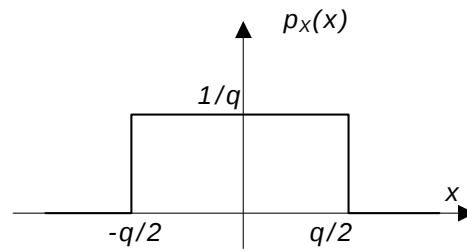


Fig. 5.2 Densité de probabilité de la v.a. uniforme

Sa moyenne est nulle. Sa variance est donnée par :

$$\sigma_x^2 = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{x^2}{q} dx = \left[\frac{x^3}{3q} \right]_{-q/2}^{q/2} = \frac{q^2}{12} \quad (5.11)$$

Il est facile de générer un tirage de cette v.a. sous Matlab, d'estimer sa moyenne et sa variance, et d'afficher un histogramme donnant une idée de sa densité de probabilité² :

```
x=rand(1,1000); %v.a. uniforme entre 0 et 1
x=(x-1/2)*10; %v.a. uniforme entre -5 et 5
m=mean(x)
m =
    0.0211
s=std(x)^2 % std = standard deviation = écart-type
s =
    8.3717
hist(x,20);
```

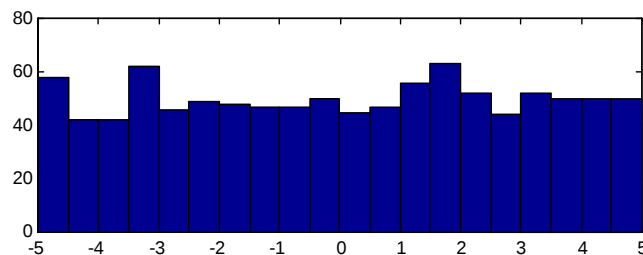


Fig. 5.3 Histogramme d'un tirage de v.a. uniforme

Exemple 5.2 - Variable aléatoire à distribution normale $N(m, \sigma)$

Cette v.a. est caractérisée par une densité de probabilité gaussienne (Fig. 5.4) :

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.12)$$

² On constate en passant que, bien que la moyenne, la variance, et la densité de probabilité d'une v.a. soient des grandeurs déterministes, leurs estimateurs à partir d'un tirage de cette v.a. sont eux-mêmes des variables aléatoires. Nous étudierons plus loin les caractéristiques de ces estimateurs.

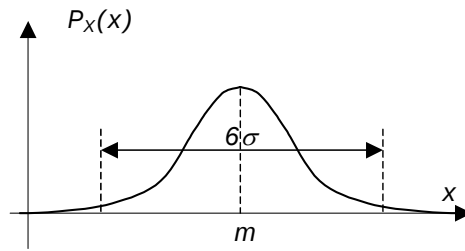


Fig. 5.4 Densité de probabilité de la v.a. gaussienne $N(m, \sigma)$

La moyenne de cette v.a. est égale à m . Sa variance est égale à σ^2 . On montre facilement que plus de 99% des valeurs d'une v.a. gaussienne tombent dans l'intervalle $(m-3\sigma, m+3\sigma)$.

Il est tout aussi facile de générer un tirage de cette v.a. sous Matlab et d'en estimer les caractéristiques :

```
x=randn(1,1000); %v.a. gaussienne N(0,1)
x=x*10+8; %v.a. gaussienne N(8,10)
m=mean(x)
m =
    7.5692
s=std(x)^2 % std = standard deviation = écart-type
s =
    89.0175
hist(x,20);
```

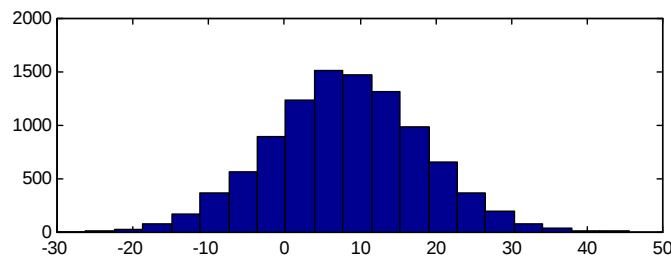


Fig. 5.5 Histogramme d'un tirage de v.a. gaussienne $N(8, 10)$

Rappelons pour terminer qu'en vertu du *théorème central limite*, la somme d'un grand nombre N de v.a. indépendantes de densités de probabilité identiques (de moyenne m_X et de variance σ_X^2) tend vers une v.a. gaussienne : $N(Nm_X, \sigma_X^2/N)$ ³. Ceci explique en soi l'importance de cette variable aléatoire.

On montre facilement qu'il est possible d'obtenir le tirage d'une v.a. X à densité de probabilité quelconque $p_X(x)$ à partir d'un tirage de v.a. U à densité uniforme, en associant à chaque réalisation u de U la valeur $x=F_X^{-1}(u)$ où F est la fonction de répartition de X (Fig. 5.6).

³ Ce qui revient à dire, vu (5.10), que la convolution d'un grand nombre de fonctions de densités de probabilités tend toujours vers une fonction gaussienne.

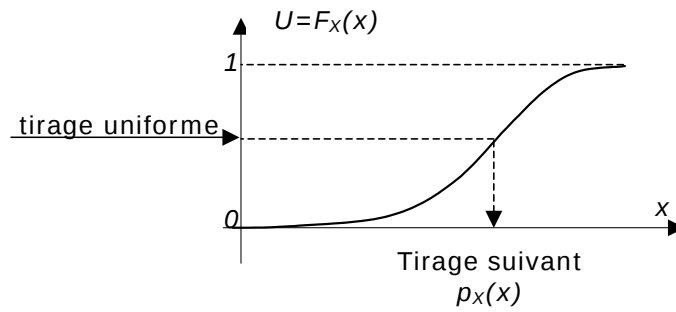


Fig. 5.6 Tirage d'une v.a. de densité de probabilité quelconque à partir d'une v.a. uniforme

5.1.2 Application : Quantification uniforme d'un signal numérique

On a étudié au chapitre 3 l'échantillonnage des signaux analogiques, qui conduit à l'obtention de signaux à temps discret. Par la suite, on a souvent utilisé abusivement le terme de *signal numérique* pour désigner le résultat de l'échantillonnage. En réalité, un signal numérique est forcément représenté, dans la mémoire d'un ordinateur, à l'aide d'un nombre fini de bits. La plupart du temps, les signaux numériques sont stockés sous la forme de nombre entiers (représentation dite *en virgule fixe*), obtenus par *quantification uniforme* du signal à temps discret.

L'opération de quantification uniforme sur N bits consiste à diviser l'intervalle $(-A, +A)$ en 2^N intervalles de même longueur $q = 2A/2^N$ appelée *pas de quantification*. On associe alors à chaque échantillon le numéro de l'intervalle auquel il appartient, représenté par un nombre binaire sur N bits. Cette opération revient à remplacer toutes les valeurs de x dans un intervalle donné $(kq - q/2, kq + q/2)$ par une valeur unique X , typiquement la valeur centrale de l'intervalle : kq .

L'erreur commise, appelée *erreur de quantification*, est donc donnée par (Fig. 5.7):

$$e = X - x \quad -q/2 \leq e \leq q/2 \quad (5.13)$$

On peut considérer cette erreur comme un bruit qui vient s'ajouter au signal à temps discret, d'où le nom usuel de *bruit de quantification* (Fig. 5.10).

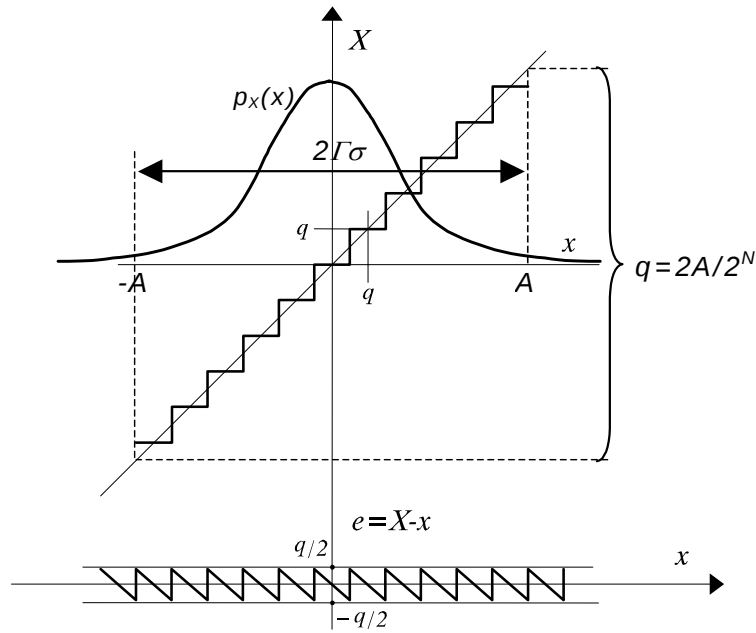
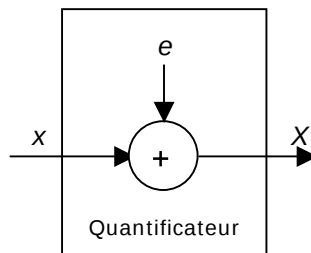

 Fig. 5.7 Quantification uniforme d'un signal x


Fig. 5.8 La quantification vue comme un bruit additif

Supposons que le signal soumis à quantification soit tel que :

- Entre 2 instants d'échantillonnage, le signal à quantifier traverse plusieurs intervalles de quantification (il suffit pour cela que l'écart-type du signal vaille au moins quelques pas de quantification ; Fig. 5.9).
- La probabilité que l'amplitude du signal dépasse A (dite *probabilité de dépassement*) soit négligeable.

Dans ces conditions, il est clair que la densité de probabilité de l'erreur de quantification peut être assimilée à une variable aléatoire uniforme entre $-q/2$ et $+q/2$. Sa moyenne est donc nulle, et sa variance est donnée par :

$$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{A^2}{3 \cdot 2^{2N}} \quad (5.14)$$

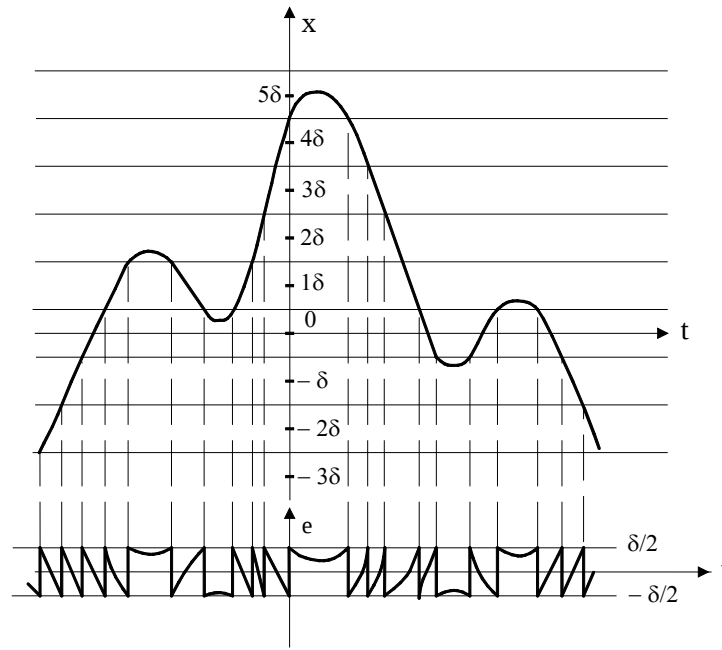


Fig. 5.9 Quantification d'un signal dont l'écart-type vaut plusieurs fois le pas de quantification (noté ici δ)

Le *rapport signal à bruit*, noté RSB est défini par le logarithme du rapport de la variance du signal à celle du bruit :

$$RSB = 10 \cdot \log \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) \text{ dB} \quad (5.15)$$

Si l'on désigne par Γ le *facteur de charge* défini par :

$$\Gamma = \frac{A}{\sigma_x}$$

on obtient :

$$RSB = 10 \log \left(\frac{1}{\Gamma^2} 3 \cdot 2^{2N} \right) \approx 6,02N + 4,44 - 20 \cdot \log \Gamma \quad (5.16)$$

Cette expression est illustrée à la Fig. 5.10 pour quelques valeurs de N . Elle montre bien que *chaque bit de quantification apporte 6 dB supplémentaire de RSB*. La valeur $N=16$ correspond à la quantification adoptée usuellement pour les signaux audio (CD, cartes sons des ordinateurs). Elle permet d'obtenir des RSB allant jusqu'à 90 dB. On remarque également sur le graphique une chute du RSB lorsque Γ diminue : l'hypothèse de non dépassement n'est alors plus vérifiée, et la variance du bruit augmente de façon importante.

En pratique, si la variable à quantifier est de type gaussien, le facteur de charge doit être supérieur ou égal à 3 ($A=3\sigma$) pour éviter le dépassement. Cette valeur est à adapter à la statistique du signal dans le cas non gaussien.

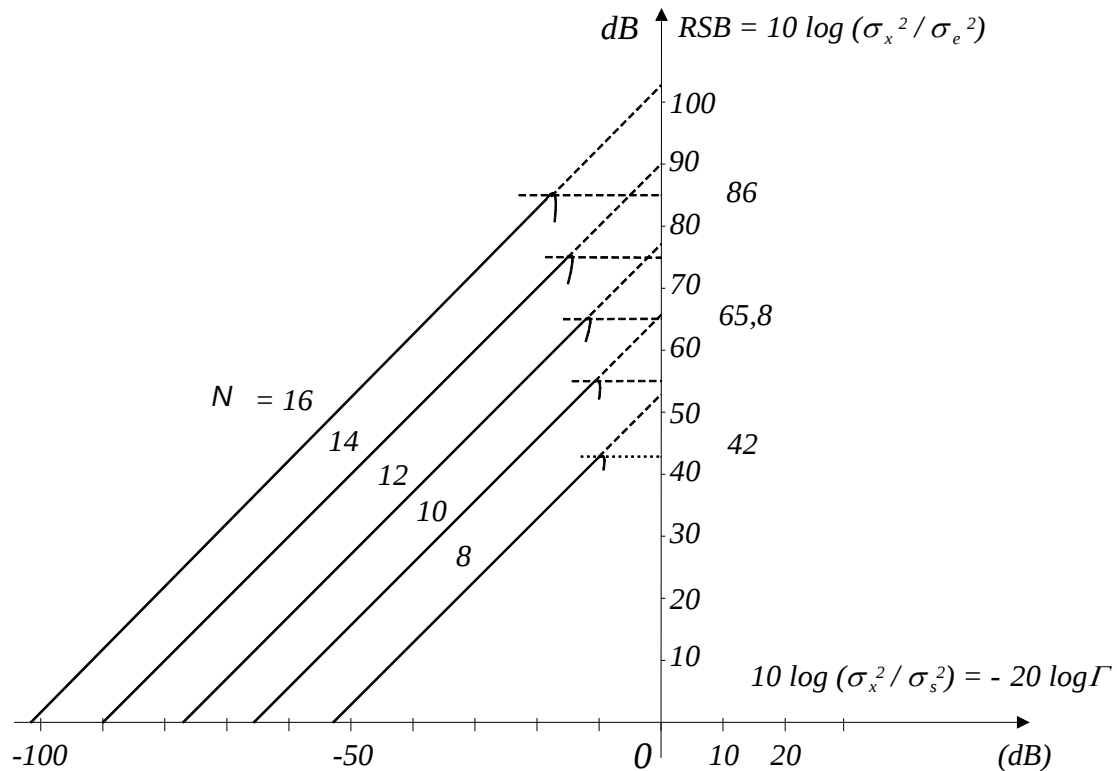


Fig. 5.10 RSB pour la quantification uniforme d'un signal dont l'écart-type vaut plusieurs fois le pas de quantification

5.2 Signaux aléatoires à temps discret

Au contraire d'un signal déterministe, dont les échantillons peuvent être caractérisés à tout instant d'échantillonnage par leur valeur, un signal aléatoire à temps discret⁴ peut être formalisé mathématiquement comme une séquence temporelle de variables aléatoires (Fig. 5.11)⁵ :

$$\{X(n)\} = \{..., X(-n), ..., X(-1), X(0), X(1), ..., X(n), ...\} \quad (5.17)$$

⁴ Si le signal provient de l'échantillonnage d'un signal aléatoire à temps continu, ce qui est souvent le cas, nous supposons toujours que l'échantillonnage respecte le théorème de Shannon. S'il s'agit d'un signal quantifié, nous supposons que le pas de quantification est petit par rapport à l'écart-type du signal.

⁵ La suite d'échantillons n'est pas considérée comme le tirage d'une même variable aléatoire : chaque échantillon est le tirage d'une variable aléatoire propre.

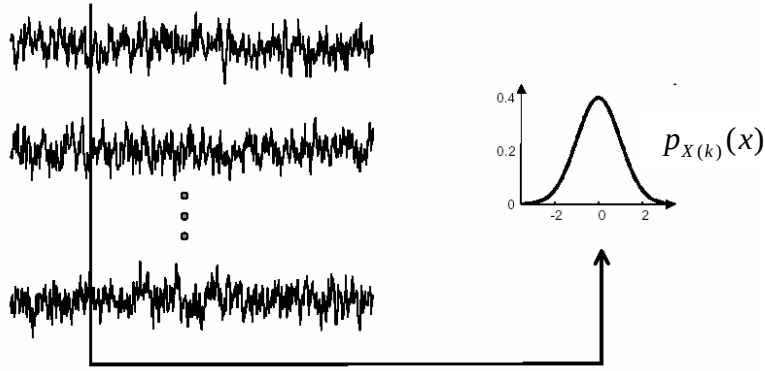


Fig. 5.11 Pour k fixé, les échantillons $x(k)$ sont des tirages d'une variable aléatoire $X(k)$

On associe ainsi à chaque échantillon k une variable aléatoire $X(k)$ de fonction de densité de probabilité $p_{X(k)}(x)$, que l'on peut estimer à partir d'un grand nombre de tirages de ce même échantillon (ce qui implique normalement un grand nombre de tirages du signal tout entier). La séquence des fonctions $p_{X(k)}(x)$ en fonction de k définit ce que l'on appelle la *statistique d'ordre 1* du signal aléatoire.

Bien que ces variables aléatoires puissent être totalement indépendantes les unes des autres (voir plus loin : « bruit blanc »), leur séquençement temporel correspond le plus souvent à un lien statistique entre échantillons successifs. La relation entre deux échantillons i et j d'un signal aléatoire peut ainsi être caractérisée par le densité de probabilité conjointe $p_{X(i)X(j)}(x,y)$ des deux variables aléatoires correspondantes. La séquence des fonctions $p_{X(i)X(j)}(x,y)$ en fonction de (i,j) définit ce que l'on appelle la *statistique d'ordre 2* du signal aléatoire.

En pratique, de même que l'on caractérise plus simplement la statistique d'ordre 1 par des moyennes (plutôt que par les fonctions de densité de probabilités complètes), on caractérise la statistique d'ordre 2 par la *fonction d'autocorrélation* du signal (5.2.1) ou par sa transformée de Fourier, la *densité spectrale de puissance* (5.2.2).

5.2.1 Fonction d'autocorrélation

Définitions

La *fonction d'autocorrélation* d'un signal aléatoire (complexe dans le cas général) est donnée par :

$$\phi_{XX}(i, j) = E[X(i)X^*(j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^* p_{X(i)X(j)}(x,y) dx dy \quad (5.18)$$

De même, on parle d'*intercorrélation* (*cross-correlation*) entre deux signaux aléatoires :

$$\phi_{XY}(i, j) = E[X(i)Y^*(j)] \quad (5.19)$$

Stationnarité au sens large et ergodicité

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons souvent les signaux aléatoires *ergodiques* et *stationnaires au sens large (SSL)*. La stationnarité au sens large impose que la statistique d'ordre 1 soit indépendante de l'indice k de l'échantillon où on la mesure :

$$p_{X(k)}(x) = p_{X(j)}(x) \stackrel{\Delta}{=} p_X(x)$$

$$\text{et donc : } m_{X(k)} = m_{X(j)} \stackrel{\Delta}{=} m_X \quad (5.20)$$

$$\sigma_{X(k)} = \sigma_{X(j)} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_X$$

et que la statistique d'ordre 2 ne dépende que de l'intervalle $j-i$, et pas de la valeur absolue de i ou j :

$$p_{X(i)X(j)}(x, y) = p_{X(i+k)X(j+k)}(x, y) \quad (5.21)$$

$$\text{et donc : } \phi_{XX}(i, j) \stackrel{\Delta}{=} \phi_{XX}(i-j) = \phi_{XX}(j-i)$$

L'ergodicité correspond quant à elle au fait que l'estimation des caractéristiques statistiques peut se faire sur la suite des échantillons d'un seul tirage du signal aléatoire⁶. En particulier, les échantillons sont tous le résultat du tirage d'une même variable aléatoire X .

Il s'ensuit que :

$$m_X = \overline{x(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(n) \right]$$

$$\sigma_X = \overline{|x(n) - m_X|^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N |x(n) - m_X|^2 \right] \quad (5.22)$$

$$\phi_{XX}(k) = \overline{x(n)x^*(n+k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x^*(n+k) \right]$$

On voit que la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire SSL et ergodique possède la propriété de *symétrie hermitienne* :

$$\phi_{XX}(-k) = \phi_{XX}^*(k) \quad (5.23)$$

La valeur de $\phi_{XX}(0)$ est quant à elle liée à la variance par :

$$\begin{aligned} \phi_{XX}(0) &= E[XX^*] \\ &= E[(X - m_X + m_X)(X - m_X + m_X)^*] \\ &= E[(X - m_X)(X - m_X)^*] + E[m_X m_X^*] \\ &\quad + E[(X - m_X)m_X^*] + E[m_X (X - m_X)^*] \\ &= \sigma_X^2 + |m_X|^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Pour un signal de moyenne nulle, elle est même égale à la variance.

5.2.2 Densité spectrale de puissance

⁶ La plus souvent, d'ailleurs, on ne dispose que d'une réalisation (parole, image, signaux bio-médicaux), sur laquelle il faut mesurer des caractéristiques.

On appelle *spectre* ou *densité spectrale de puissance* $S_{XX}(f)$ d'un signal aléatoire SSL la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Dans le cas d'un signal à temps discret, la fonction d'autocorrélation est elle aussi à temps discret, et la densité spectrale de puissance se réduit à une TFTD :

$$S_{XX}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(n) e^{-jn\varphi} \quad \text{avec } \varphi = 2\pi F \quad (5.25)$$

Comme la fonction d'autocorrélation possède la symétrie hermitique, la densité spectrale de puissance est purement réelle. Si de plus la variable aléatoire X est réelle, alors la fonction d'autocorrélation est réelle paire, et la densité spectrale de puissance l'est aussi.

La TFTD inverse de la densité spectrale de puissance est bien entendu :

$$\varphi_{XX}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{XX}(F) e^{jn\varphi} dF \quad (5.26)$$

En particulier, on notera que, pour un signal de moyenne nulle, la variance est donnée par la surface sous-tendue par la densité spectrale de puissance (Fig. 5.12) :

$$\sigma_X^2 = \varphi_{XX}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{XX}(F) dF \quad (5.27)$$

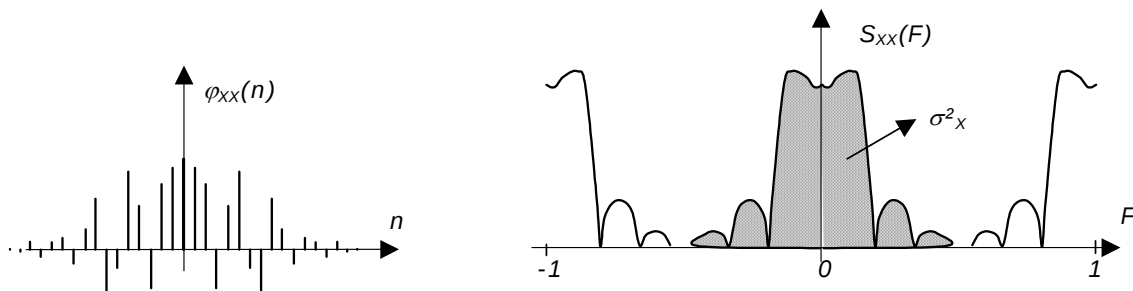


Fig. 5.12 Fonction d'autocorrélation, densité spectrale de puissance et variance d'un bruit réel à moyenne nulle

Exemple 5.3 – Bruit blanc

Un bruit blanc (que nous supposerons de moyenne nulle) est un signal aléatoire dont les échantillons successifs sont des variables aléatoires non corrélées. Il s'ensuit que la fonction d'autocorrélation est nulle partout sauf en 0 :

$$\varphi_{XX}(k) = \begin{cases} \sigma_X^2 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

La densité spectrale de puissance d'un bruit blanc est donc une constante :

$$S_{XX}(F) = \sigma_X^2 \quad (5.29)$$

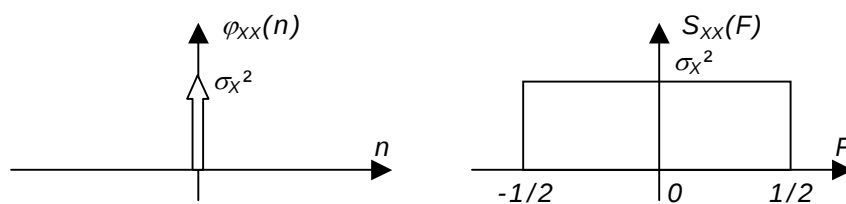


Fig. 5.13 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance d'un bruit blanc

Un bruit blanc est donc physiquement un signal composé en proportions égales de composantes toutes les fréquences (tout comme une lumière blanche est composée d'ondes lumineuse dans tout le spectre visible).

Les bruits blancs diffèrent entre eux par leur statistique du 1^{er} ordre (la densité de probabilité de la v.a. sous-jacente) : bruit blanc uniforme, gaussien, etc.

Les fonctions Matlab déjà mentionnées pour la tirage des variables aléatoires sont donc directement utilisables pour produire les bruits blancs correspondants.

```
subplot(2,1,1) ; plot(rand(1,300)); title('bruit blanc uniforme (0,1)');
subplot(2,1,2) ; plot(randn(1,300)); title('bruit blanc gaussien (0,1)');
```

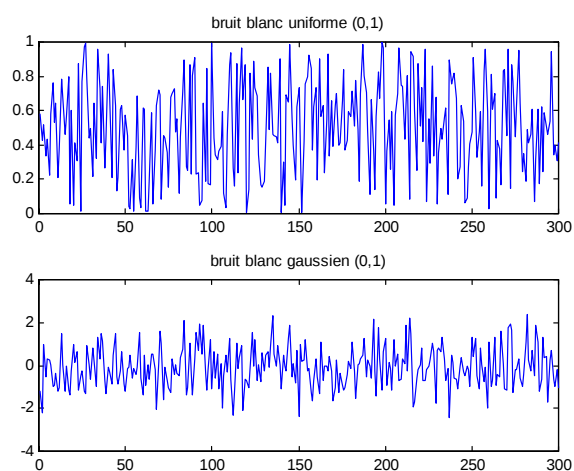


Fig. 5.14 Tirage de bruits blancs

Exemple 5.4 – Signal périodique

La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique (que l'on peut toujours considérer comme un signal aléatoire) est elle-même périodique. En effet, considérons pour commencer un signal analogique $x(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$. Sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{j(\omega_0 \tau + \phi)} Ae^{-j(\omega_0(\tau+t) + \phi)} d\tau \\ &= \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\omega_0 \tau + \phi} e^{-j\omega_0(\tau+t) - \phi} d\tau \\ &= A^2 e^{-j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sa densité spectrale de puissance est donc une impulsion de Dirac :

$$S_{XX}(f) = A^2 \delta(f + f_0) \quad \text{avec} \quad f_0 = \omega_0 / 2\pi \quad (5.31)$$

Il s'ensuit, vu l'orthogonalité des exponentielles de fréquences harmoniques, que l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance d'une fonction périodique $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{i=0}^p A_i e^{j(i\omega_0 t + \phi_i)} \quad (5.32)$$

sont données par :

$$\varphi_{XX}(t) = \sum_{i=0}^p A_i^2 e^{-ji\omega_0 t} \quad S_{XX}(f) = \sum_{i=0}^p A_i^2 \delta(f + if_0) \quad (5.33)$$

De même, la fonction d'autocorrélation associée à une fonction cisoïdale $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ est donnée par :

$$\varphi_{XX}(t) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 t) \quad S_{XX}(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - if_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + if_0) \quad (5.34)$$

Ces conclusions sont directement transposables aux signaux numériques. La fonction d'autocorrélation du signal numérique correspond à l'échantillonnage de la fonction d'autocorrélation du signal analogique. La densité spectrale de puissance est donc périodique en F de période 1 (Fig. 5.15).

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(k) &= \frac{A^2}{2} \cos(n\varphi_0) \quad (\varphi_0 = \omega_0 / f_e) \\ S_{XX}(F) &= \frac{A^2}{4} \delta(F - iF_0) + \frac{A^2}{4} \delta(F + iF_0) \quad (\text{pour } 0 < F (= f / f_e) < 1) \end{aligned} \quad (5.35)$$

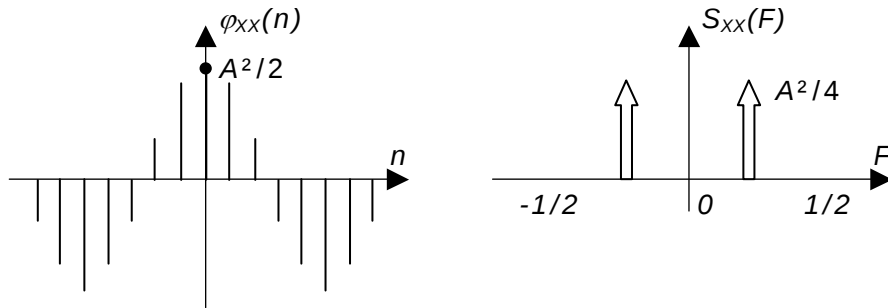


Fig. 5.15 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance d'une sinusoïde numérique d'amplitude A

Exemple 5.5 – Signal aléatoire de moyenne non nulle

La fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire $X(n)$ de moyenne nulle, auquel on ajoute une constante m_X est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_{(X+m_X)(X+m_X)}(k) &= E[(X(n) + m_X)(X(n+k) + m_X)^*] \\ &= \varphi_{XX}(k) + |m_X|^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Sa densité spectrale de puissance est donc égale à celle du signal de départ, à laquelle on ajoute une impulsion de Dirac en 0 :

$$S_{(X+m_X)(X+m_X)}(F) = S_{XX}(F) + |m_X|^2 \delta(F) \quad (|F| \leq 1) \quad (5.37)$$

Appliquées au signal correspondant à la Fig. 5.12, ces conclusions conduisent à la Fig. 5.16.

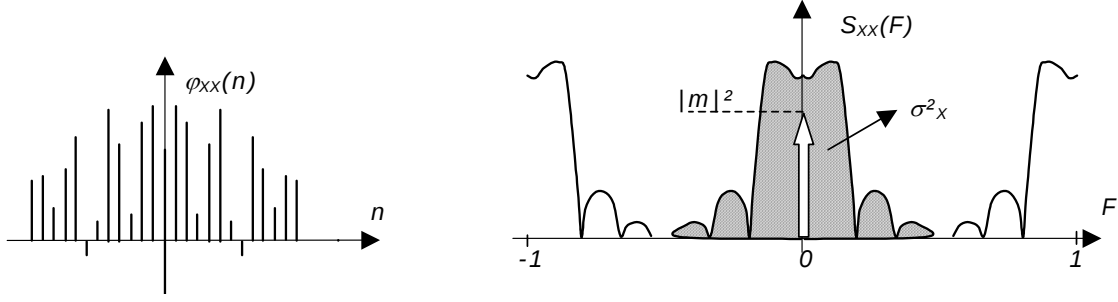


Fig. 5.16 Fonction d'autocorrélation, densité spectrale de puissance et variance d'un bruit réel à moyenne non nulle.

Exemple 5.6 – Somme de deux signaux aléatoires non-corrélés

La fonction d'autocorrélation d'une somme de deux signaux $X(n)$ et $Y(n)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(k) &= E[(X(n) + Y(n))(X(n+k) + Y(n+k))^*] \\ &= \varphi_{XX}(k) + \varphi_{YY}(k) + \varphi_{XY}(k) + \varphi_{YX}(k)\end{aligned}\quad (5.38)$$

Si les deux signaux sont non-corrélés, elle se réduit donc à :

$$\varphi_{X+Y}(k) = \varphi_{XX}(k) + \varphi_{YY}(k) \quad (5.39)$$

La densité spectrale de puissance de la somme est alors égale à la somme des densités spectrales de puissance :

$$S_{X+Y}(F) = S_{XX}(F) + S_{YY}(F) \quad (5.40)$$

L'exemple précédent n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de ce principe.

5.3 Filtrage d'un signal aléatoire SSL

Soit un signal aléatoire $\{x(n)\}$ stationnaire au sens large placé en entrée d'un filtre numérique de réponse impulsionnelle $\{h(n)\}$:

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n-i) \quad (5.41)$$

En vertu de (5.10), la densité de probabilité du signal $y(n)$ résulte de la convolution d'un grand nombre de densités de probabilités similaires (les coefficients de la réponse impulsionnelle agissant comme facteurs d'échelle). Elle est donc en toute généralité différente de départ, et tend vers une distribution gaussienne en vertu du théorème central limite. En particulier, si $x(n)$ est un bruit gaussien, $y(n)$ l'est aussi.

Le signal de sortie $\{y(n)\}$ est SSL. En effet, sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes de l'instant où on les calcule :

$$m_{Y(k)} = E[Y(k)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)E[X(n-i)] = m_X \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{YY}(n, n+m) &= E[Y(n)Y^*(n+m)] = E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)X(n-i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)X^*(n+m-j)\right] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j) E[X(n-i)X^*(n+m-j)] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j) \varphi_{XX}(m-j+i) = \varphi_{YY}(m)
\end{aligned}$$

On peut mettre ce dernier résultat sous une forme plus simple :

$$\begin{aligned}
\varphi_{YY}(m) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k+i) \varphi_{XX}(m-k) \quad \text{avec } k = j-i \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(m-k) \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(m-k) \varphi_{HH}(k)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

La fonction d'autocorrélation de la sortie est donc la convolution entre la fonction d'autocorrélation de l'entrée et la fonction $\varphi_{HH}(k)$ donnée par :

$$\varphi_{HH}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i-k) = \{h(n)\} * \{h(-n)\} \tag{5.44}$$

On en conclut que la fonction d'autocorrélation du signal de sortie est le résultat du filtrage de la fonction d'autocorrélation de l'entrée par la « fonction d'autocorrélation » de la réponse impulsionnelle.

La TFTD de $\varphi_{HH}(k)$ vaut :

$$S_{HH}(F) = H(F)H^*(F) = |H(F)|^2 \tag{5.45}$$

D'où l'expression simple de la densité spectrale de puissance de la sortie (Fig. 5.17):

$$S_{YY}(F) = |H(F)|^2 S_{XX}(F) \tag{5.46}$$

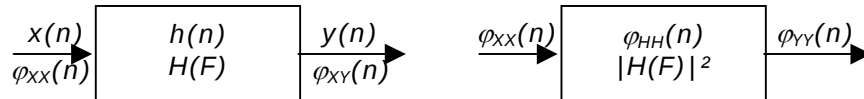


Fig. 5.17 Filtrage d'un signal aléatoire

La corrélation entrée-sortie, quand à elle, est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{XY}(k) &= \overline{x(n)y(n+k)} \\
 &= \overline{x(n) \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n+k-i)} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)x(n+k-i)} h(i) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \varphi_{XX}(k-i)
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Le filtrage d'un signal aléatoire produit donc un signal de sortie corrélé avec le signal de départ, ce qui correspond intuitivement avec le fait que la forme temporelle du signal de sortie dépend directement de la forme temporelle du proche passé du signal d'entrée. Cette notion intuitive se traduit formellement par la convolution (5.47), qui exprime le fait que la fonction d'intercorrélation entrée-sortie est obtenue par filtrage de la fonction d'autocorrélation de l'entrée (Fig. 5.17).

Les exemples qui suivent montrent comment on peut se servir du filtrage pour créer un bruit *coloré* (c'est-à-dire un bruit de densité spectrale de puissance non constante) à partir d'un bruit blanc.

Exemple 5.7 – Filtrage d'un bruit blanc par un passe-bande idéal

Dans le cas particulier où le signal $x(n)$ est un bruit blanc de variance σ_X^2 et de moyenne nulle, il vient :

$$\begin{aligned}
 S_{YY}(F) &= \sigma_X^2 |H(F)|^2 \\
 \sigma_Y^2 = \varphi_{XX}(0) &= \sigma_X^2 \int_{-1/2}^{+1/2} |H(F)|^2 dF
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Si le filtre est un passe-bande idéalisé dont la bande passante normalisée vaut B ($B < 1$), on trouve donc (Fig. 5.18) :

$$\sigma_Y^2 = 2\sigma_X^2 B \tag{5.49}$$

La variance du signal de sortie est donc plus faible que celle du signal d'entrée puisque le filtre élimine une partie du spectre du bruit.

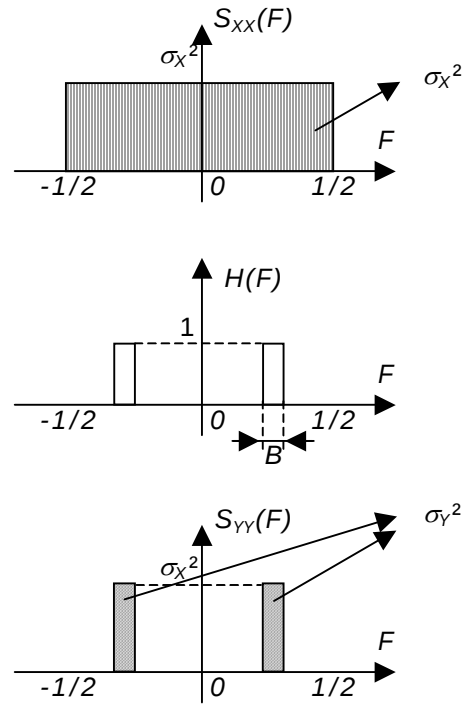


Fig. 5.18 Densité spectrale de puissance avant et après filtrage

Exemple 5.8 – Signal aléatoire à moyenne mobile (MA)

Un signal aléatoire à moyenne mobile (Moving Average, MA) $y(n)$ est le résultat du filtrage d'un bruit blanc $x(n)$ de moyenne nulle et de variance σ_x^2 dans un filtre à moyenne mobile (filtre RIF, non récursif ; Fig. 5.19) :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (5.50)$$

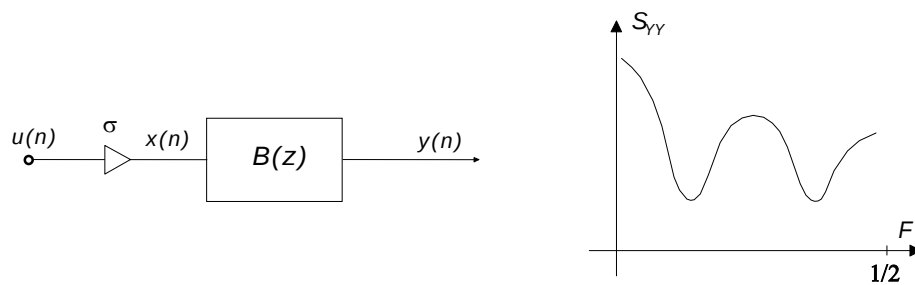


Fig. 5.19 Création d'un signal MA ($u(n)$ est un bruit blanc de variance=1) et densité spectrale de puissance résultante

La densité spectrale de puissance de ce signal est donnée par :

$$S_{YY}(F) = \sigma_x^2 \left| \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right|_{z=e^{j\varphi}}^2 \quad (5.51)$$

Un signal MA est donc un bruit coloré. Sa densité spectrale de puissance présente des creux à la fréquence angulaire des zéros du filtre.

Exemple 5.9 – Signal aléatoire autorégressif (AR)

Un signal aléatoire autorégressif (AR) $y(n)$ est le résultat du filtrage d'un bruit blanc $x(n)$ de moyenne nulle et de variance σ_x^2 dans un filtre tout-pôles (filtre RII, récursif, ne possédant pas de zéros ; Fig. 5.20) :

$$y(n) = x(n) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (5.52)$$

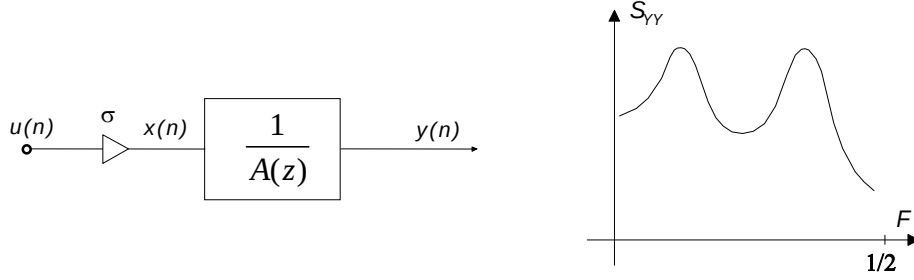


Fig. 5.20 Création d'un signal AR ($u(n)$ est un bruit blanc de variance=1) et densité spectrale de puissance résultante

La densité spectrale de puissance de ce signal est donnée par :

$$S_{YY}(F) = \sigma_x^2 \left| \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \right|_{z=e^{j\omega}}^2 \quad (5.53)$$

Exemple 5.10 – Signal aléatoire autorégressif à moyenne ajustée (ARMA)

Un signal aléatoire autorégressif à moyenne ajustée (ARMA) est le résultat du filtrage d'un bruit blanc $x(n)$ de moyenne nulle et de variance σ_x^2 dans un filtre récursif (filtre RII ; Fig. 5.21) :

$$y(n) = \sum_{i=1}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (5.54)$$

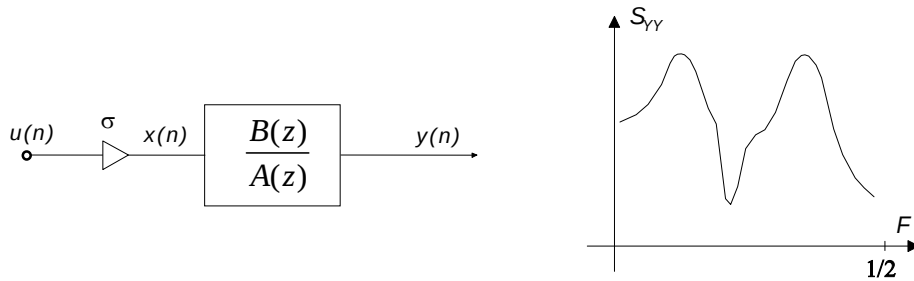


Fig. 5.21 Création d'un signal ARMA et densité spectrale de puissance résultante

La densité spectrale de puissance de ce signal est donnée par :

$$S_{YY}(F) = \sigma_x^2 \left| \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \right|_{z=e^{j\omega}}^2 \quad (5.55)$$

5.4 Estimation de la statistique du second ordre

Tout comme la TFTD, l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance supposent des calculs sur un nombre infini d'échantillons. En pratique, les signaux aléatoires sont rarement stationnaires sur une durée infinie, et les calculs se font donc toujours à partir d'*estimateurs* opérant dans une fenêtre de N valeurs.

5.4.1 Statistique d'un estimateur

Il est important de connaître l'effet d'une troncation à N échantillons sur la qualité de l'estimation. Comme les signaux sont aléatoires, les estimateurs le sont aussi. Ils sont donc eux-mêmes caractérisés par leur moyenne, variance, et densité de probabilité.

Lorsque la moyenne d'un estimateur est différente de la valeur qu'il estime, on dit que l'estimateur est *biaisé*. Lorsque la variance de l'estimateur ne peut être rendue aussi petite que l'on veut (même en augmentant le nombre de points sur lesquels se base l'estimation), on dit que l'estimateur est *non consistant*. Il est clair qu'on cherche en général des estimateurs non biaisés et consistants.

La densité de probabilité de l'estimateur permet également d'associer un intervalle de confiance à l'estimation qu'il fournit.

Exemple 5.11 – Estimation de la moyenne d'un signal Gaussien

Considérons un exemple simple : l'estimation de la moyenne d'un signal aléatoire gaussien stationnaire dont la densité spectrale de puissance est supposée constante (bruit blanc) excepté la présence d'une raie en $F=0$ due précisément à la composante moyenne :

$$S_{XX}(F) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \delta(F) \quad |F| \leq 1 \quad (5.56)$$

L'estimateur $\hat{\mu}_x$ sera donné par :

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (5.57)$$

Cette expression est une variable aléatoire car c'est une somme de variables aléatoires. L'estimateur est non biaisé car :

$$E[\hat{\mu}_x] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[x(n)] = \mu_x \quad (5.58)$$

Quant à la variance de l'estimateur, elle est donnée par :

$$\text{VAR}[\hat{\mu}_x] = E[(\hat{\mu}_x - E[\hat{\mu}_x])^2] = E[(\hat{\mu}_x - \mu_x)^2] \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}[\hat{\mu}_x] &= E \left[\left(\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \right) - \mu_x \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{N^2} E \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) - N\mu_x \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \mu_x)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Puisque $x(n) - \mu_x$ est un bruit blanc de moyenne nulle, les variables aléatoires correspondant aux échantillons successifs sont indépendantes. L'espérance mathématique de leur produit est donc nulle, et il vient :

$$\text{VAR}[\hat{\mu}_x] = \frac{1}{N^2} N \sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sigma_x^2 \tag{5.61}$$

On observe qu'en l'occurrence, la variance de l'estimateur tend vers zéro lorsque le nombre d'échantillons tend vers l'infini: cet estimateur est consistant.

Sous Matlab :

```

x= randn(100,100)+1 ; % 100 échantillons de 100 bruits blancs gaussiens (1,1)
for N=2:100
    mux= sum(x(1:N, :))/N ; % somme de N bruits blancs
    meanmux(N)=mean(mux);
    varmux(N)=std(mux)*std(mux);
end
subplot(2,1,1) ; plot(meanmux); title('moyenne(mux)');
subplot(2,1,2) ; plot(varmux); title('variance(mux)');
    
```

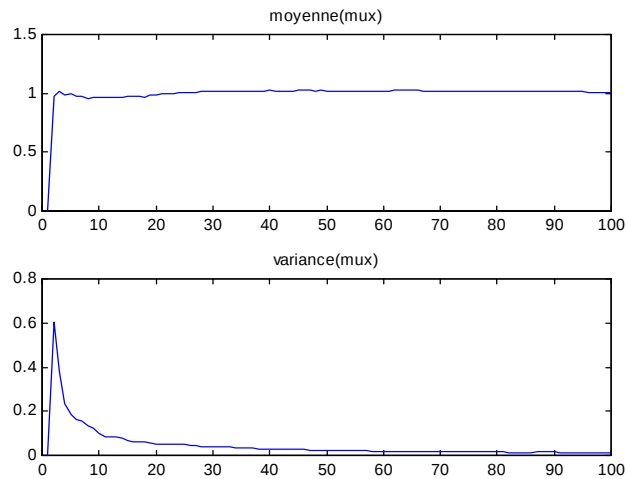


Fig. 5.22 Calcul approché de la moyenne et de la variance de l'estimateur $\hat{\mu}_x$, en fonction de N .

On peut, pour terminer, associer un intervalle de confiance à $\hat{\mu}_x$. Cet estimateur est en effet une gaussienne de moyenne μ_x et de variance σ_x^2 / N . La vraie moyenne μ_x se trouve donc dans l'intervalle $[\mu_x - d, \mu_x + d]$ avec une probabilité de 90% si :

$$\text{prob} \left[-\alpha \leq \frac{\hat{\mu}_x - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{N}} \leq \alpha \right] = 0,9 \quad d = \alpha \cdot \sigma_x / \sqrt{N} \quad (5.62)$$

L'intervalle de confiance à 90% sera $[\hat{\mu}_x - d, \hat{\mu}_x + d]$, ce qui signifie qu'il y a 90% de chances pour que cet intervalle contienne la vraie valeur μ_x . Le paramètre α est obtenu en tenant compte de ce que :

$$\frac{\hat{\mu}_x - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{N}} \text{ est une v.a. gaussienne } N[0,1] \Rightarrow \alpha = 1.645 \quad (5.63)$$

5.4.2 Estimation de la fonction d'autocorrélation

Estimateur non biaisé

Un premier estimateur est défini comme suit :

$$\bar{\varphi}_{xx}(k) = \frac{1}{N - |k|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x(n)x^*(n+k) \quad (5.64)$$

On peut vérifier⁷ que $E[\bar{\varphi}_{xx}] = \varphi_{xx}$: cet estimateur n'est donc pas biaisé. Pour $k \ll N$, on montre que sa variance vaut :

$$\text{VAR}[\bar{\varphi}_{xx}] \approx \frac{N}{(N - |k|)^2} \cdot \sum_l [\varphi_{xx}^2(l) + \varphi_{xx}(l+k)\varphi_{xx}(l-k)] \quad (5.65)$$

et comme elle varie comme $1/N$, l'estimateur est consistant.

Estimateur biaisé

On peut définir un autre estimateur :

$$\hat{\varphi}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x(n)x^*(n+k) \quad (5.66)$$

pour lequel on a évidemment :

$$E[\hat{\varphi}_{xx}(k)] = \frac{N - |k|}{N} \varphi_{xx}(k) \quad (5.67)$$

D'autre part, on trouve pour la variance :

$$\text{VAR}[\hat{\varphi}_{xx}(k)] \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_l [\varphi_{xx}^2(l) + \varphi_{xx}(l+k)\varphi_{xx}(l-k)] \quad (5.68)$$

Ce nouvel estimateur est *donc biaisé* (surtout pour les grandes valeurs de k), mais reste consistant. On observe par contre que lorsque k approche du nombre d'échantillons N , la variance de l'estimateur non biaisé $\bar{\varphi}_{xx}(k)$ devient excessive, alors que celle de l'estimateur biaisé $\hat{\varphi}_{xx}(k)$ varie beaucoup moins. C'est une des raisons pour lesquelles cet estimateur est souvent utilisé par la suite, malgré son biais.

⁷ Nous avons traité complètement le cas de l'estimateur de la moyenne d'un signal Gaussien. Nous ne donnerons plus que les résultats finaux pour le traitement des estimateurs de la fonction de l'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance. Les calculs sont effets assez fastidieux.

L'autre raison est qu'il est possible de calculer (5.66) par FFT. Il apparaît en effet que :

$$\hat{\phi}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \{x_N(n)\} * \{x_N^*(-n)\} \quad (5.69)$$

où $\{x_N(n)\} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1), 0, 0, \dots\}$. On peut donc calculer l'autocorrélation comme une convolution numérique linéaire. On a vu au chapitre 3 qu'il est possible de le faire de façon efficiente en simulant une convolution circulaire par FFT/IFFT.

Exemple 5.12 – Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un signal Gaussien

Considérons l'exemple d'un signal aléatoire gaussien stationnaire de moyenne nulle et de variance égale à 4 :

$$\begin{aligned} S_{xx}(F) &= 4 \\ \phi_{xx}(k) &= 4\delta(k) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Sous Matlab, les deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation sont appelés par `xcorr(x, 'biased')` et `xcorr(x, 'unbiased')` :

```
x= 2*randn(1,100) ; % 100 échantillons d'un bruit blanc gaussien (0,2)
subplot(2,1,1) ; plot(xcorr(x, 'biased'));
title('autocorrélation sur 100 points, estimateur biaisé');
subplot(2,1,2) ; plot(xcorr(x, 'unbiased'));
title('autocorrélation sur 100 points, estimateur non-biaisé');
```

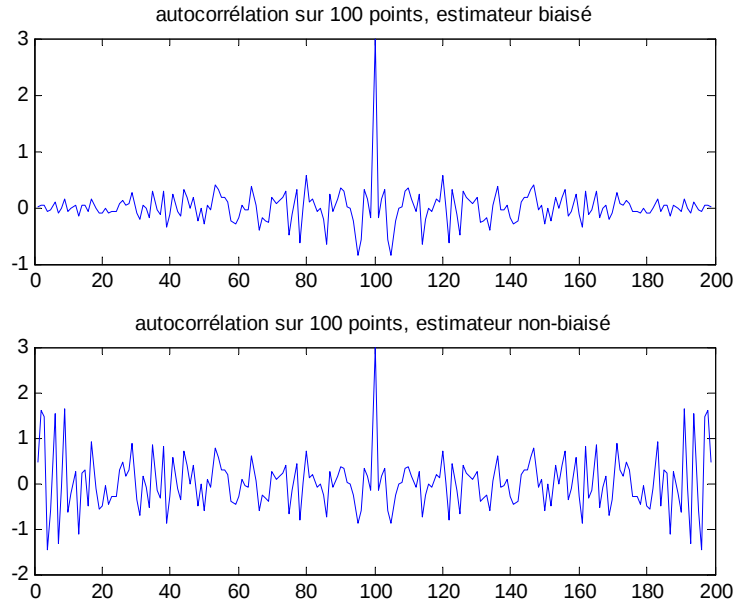


Fig. 5.23 Calcul de $\hat{\phi}_{xx}(k)$ (estimateur biaisé) et $\bar{\phi}_{xx}(k)$ (non-biaisé) sur 100 points d'un bruit blanc.

Exemple 5.13 – Estimation de la fonction d'autocorrélation d'une cisoïde

On vérifie facilement que la valeur de la fonction d'autocorrélation d'une cisoïde d'amplitude A est un cosinus de même fréquence et d'amplitude $A^2/2$.

```

x= 10*cos(2*pi*1/10*(0:99)+pi/5) ;
% 100 échantillons d'un cosinus à Fe/10, d'amplitude 10 et de phase initiale pi/5
subplot(2,1,1) ; plot(xcorr(x, 'biased'));
title('autocorrélation sur 100 points, estimateur biaisé');
subplot(2,1,2) ; plot(xcorr(x, 'unbiased'));
title('autocorrélation sur 100 points, estimateur non-biaisé');

```

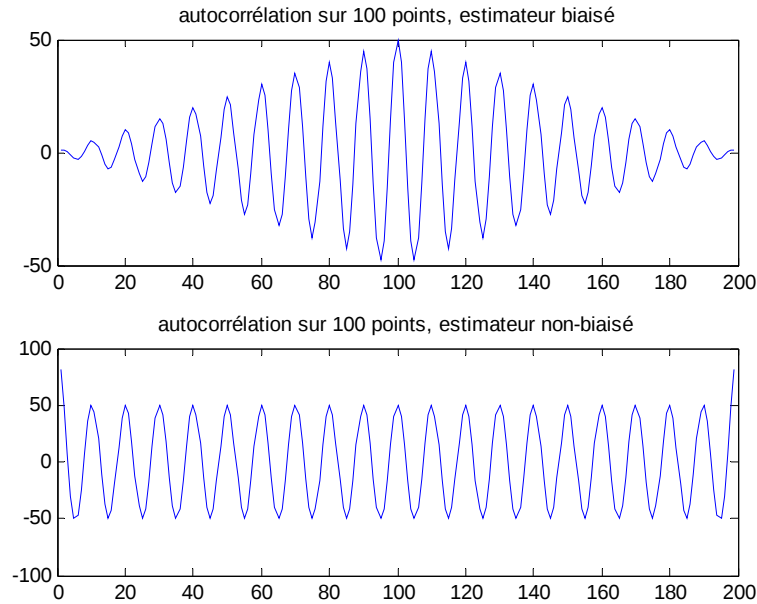


Fig. 5.24 Calcul de $\hat{\phi}_{xx}(k)$ (estimateur biaisé) et $\bar{\phi}_{xx}(k)$ (non-biaisé) sur 100 points d'un cisoïde.

5.4.3 Estimation non paramétrique de la densité spectrale de puissance

Le périodogramme

L'estimateur spectral le plus simple est le *périodogramme* qui correspond à la transformée de Fourier d'une estimation de la fonction d'autocorrélation, à l'aide de l'estimateur biaisé $\hat{\phi}_{xx}(k)$:

$$\hat{S}_{xx}(\varphi) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{\phi}_{xx}(k) e^{-jk\varphi} \quad (5.71)$$

Si on remplace $\hat{\phi}_{xx}(k)$ par son expression dans (5.69), on trouve immédiatement :

$$\hat{S}_{xx}(\varphi) = \frac{1}{N} |X_N(\varphi)|^2 \quad (5.72)$$

où $X_N(\varphi)$ est la TFTD de la suite $x(n)$:

$$X_N(\varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\varphi} \quad (5.73)$$

Par conséquent, pour $\varphi = k2\pi / N$, la densité spectrale peut donc être calculée par un algorithme de FFT qui fournit $X_N(\varphi)$ en N points uniformément répartis entre $F = -1/2$ et $1/2$.

Toutefois, le périodogramme est un estimateur biaisé, puisqu'il est lui-même basé sur un estimateur biaisé :

$$E[\hat{S}_{XX}(\varphi)] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} E[\hat{\phi}_{XX}(k)] e^{-jk\varphi} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|k|}{N} \phi_{XX}(k) e^{-jk\varphi} \quad (5.74)$$

Cette expression représente la TFTD de la fonction d'autocorrélation $\phi_{XX}(k)$ vue à travers une fenêtre triangulaire de durée $2N-1$; en fréquence, cela correspond à une convolution entre la vraie densité spectrale de puissance et la TFTD de la fenêtre.

D'autre part, on montre que, dans le cas particulier d'un bruit blanc gaussien de variance σ_x^2 , on trouve :

$$\text{VAR}[\hat{S}_{XX}(\varphi)] = S_{XX}^2(\varphi) \quad (5.75)$$

Cette variance, égale au carré de la densité spectrale, est très élevée et elle est indépendante du nombre N d'échantillons ! Le périodogramme simple n'est donc pas consistant et il n'est pas utilisable tel quel.

Le périodogramme modifié

Tout comme dans le cas du calcul de la TFTD d'un signal déterministe, il est possible de pondérer l'estimateur de la fonction d'autocorrélation par une fonction fenêtre $w(n)$ sur N points avant passage à sa TFTD. L'estimateur spectral doit alors être calculé comme :

$$\ddot{S}_{XX}(\varphi) = \frac{1}{NP} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-jn\varphi} \right|^2 \quad (5.76)$$

où P est un facteur de normalisation (destiné à éliminer le biais introduit par la fenêtre) défini par :

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2 \quad (5.77)$$

Ce nouvel estimateur est tout aussi biaisé que le précédent (où la fenêtre appliquée sur les échantillons avant calcul de la FFT est simplement rectangulaire). Par contre, sa variance est réduite, du fait de l'effet de lissage de la densité spectrale de puissance réalisé par la convolution avec le spectre de la fenêtre.

Le choix de la fenêtre devient important lorsque la densité spectrale de puissance du signal étudié comprend des raies superposées à un bruit large bande. L'effet des fenêtres est similaire à ce qui avait déjà été mis en évidence au chapitre 4.

Le périodogramme moyenné

Pour réduire la variance d'un estimateur, il suffit, en principe, de calculer la moyenne de plusieurs estimateurs identiques mais indépendants. Le signal de durée N est donc décomposé en L segments de durée $M=N/L$; pour chacun de ces segments, on calcule par FFT un périodogramme (avec ou sans fenêtre de pondération). On calcule alors la moyenne des estimations pour chaque

fréquence $\varphi = k2\pi / M$. Les différentes tranches considérées peuvent se recouvrir ou non.

$$\bar{S}_{xx}(\varphi) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^L \ddot{S}_{xx,i}(\varphi) \quad (5.78)$$

avec

$$\ddot{S}_{x,i}(\varphi) = \frac{1}{MP} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) w(n) e^{-jn\varphi} \right|^2 \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (5.79)$$

Si on le compare au précédent, le biais introduit par cet estimateur est plus important, puisque la fenêtre de pondération est plus courte (sa TFTD est donc plus large). On peut montrer que sa variance est donnée par:

$$\text{VAR}[\bar{S}_{xx}(\varphi)] \approx \frac{1}{L} S_{xx}^2(\varphi) \quad (5.80)$$

si l'on peut considérer les L sections comme indépendantes.

Pour N fixé, il y a donc conflit entre une grande valeur de L qui diminue la variance et une pauvre résolution car M diminue.

L'estimateur spectral adouci

On peut également réduire la variance d'un estimateur spectral simple en pondérant l'estimation de la fonction d'autocorrélation (et non pas les échantillons comme c'était le cas plus haut) par une fonction fenêtre qui atténue l'effet des fonctions d'autocorrélation aux extrémités de la fenêtre (on sait en effet que les valeurs extrêmes de la fonction d'autocorrélation sont mal calculées) :

$$\tilde{S}_{xx}(\varphi) = \sum_{k=-M}^M w(k) \hat{\phi}_{xx}(k) e^{-jk\varphi} \quad (5.81)$$

où M est plus petit que N (nombre d'échantillons du signal à partir desquels la fonction d'autocorrélation est estimée) : typiquement $M=N/5$; $w(n)$ est appelée *fenêtre temporelle* de durée $2M+1$ et qui doit être symétrique et paire pour assurer de fournir une estimation de la densité spectrale de puissance qui soit paire et réelle. Le produit dans le domaine temporel correspond à une convolution fréquentielle :

$$\tilde{S}_{xx}(F) = \hat{S}_{xx}(F) * W(F) \quad (5.82)$$

L'estimateur est donc forcément biaisé. On montre que sa variance est effectivement inférieure à celle du périodogramme.

Cet estimateur est aussi appelé estimateur de *Blackman-Tukey*; on peut considérer qu'il vise à atténuer les erreurs importantes commises sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation lorsque le délai k tend vers le nombre d'échantillons disponibles N .

A nouveau il y a un compromis entre le choix de M le plus grand possible pour que le spectre de la fenêtre se rapproche de l'impulsion de Dirac, ce qui assure un faible biais et le choix de M petit, ce qui assure une faible variance.

Exemple 5.14 – Bruit blanc

Sous Matlab, les périodogrammes simple, modifié, et moyenné sont appelés par la fonction `psd(x,NFFT,Fs>window)`, qui découpe le signal x en tranches de $NFFT$ échantillons, les pondère par la fenêtre $window$, et affiche la moyenne de leur TSTD (F_s , fréquence d'échantillonnage, n'est utilisée que pour l'affichage). Comme pour `freqz`, un appel à `psd` sans variable de sortie provoque l'affichage de la densité spectrale de puissance.

Considérons le cas du bruit blanc Gaussien $N(0,2)$ de l'exemple précédent, dont on estime la densité spectrale au moyen du périodogramme simple. On constate une grande dispersion des valeurs autour de la valeur vraie (une constante égale à $10\log_{10}(4)=6\text{dB}$), qui ne diminue pas lorsque $NFFT$ augmente. Le calcul du périodogramme modifié lisse un peu la variation du spectre. Lorsque le même bruit blanc est estimé au moyen du périodogramme moyenné (avec une fenêtre rectangulaire), on observe une nette diminution des variations de l'estimation (Fig. 5.25).

```
x= 2*randn(1,512) ; % 512 échantillons d'un bruit blanc gaussien (0,2)
subplot(2,2,1) ; psd(x(1:128),128,1,ones(1,128)); % périodogramme simple8
subplot(2,2,2) ; psd(x,512,1,ones(1,512)); % périodogramme simple
subplot(2,2,3); psd(x(1 :129),128,1,hamming(128)); % périodogramme modifié
subplot(2,2,4) ; psd(x,128,1,ones(1,128)); % périodogramme moyenné

subplot(2,2,1) ;ax=axis; subplot(2,2,2) ;axis(ax);
subplot(2,2,3) ;axis(ax); subplot(2,2,4) ;axis(ax); % axes identiques
```

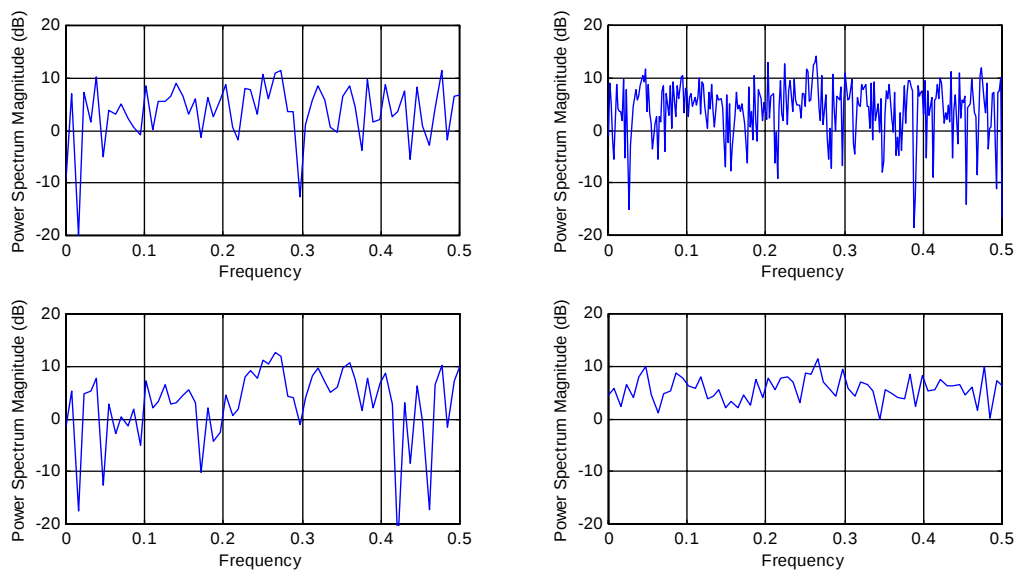


Fig. 5.25 Périodogrammes d'un bruit blanc. En haut à gauche : simple ($N=128$) ; en haut à droite : simple ($N=512$) ; en bas à gauche : modifié (hamming($N=128$)) ; en bas à droite : moyenné : $N=128$ et $L=4$.

Notons que l'estimation de la variance du bruit peut être faite par intégration de la densité spectrale de puissance estimée, selon (5.27). Il suffit pour ce faire de multiplier chaque valeur de la `psd` par la largeur de la bande de fréquence à laquelle elle correspond, c'est-à-dire $1/NFFT$ (on a en effet $NFFT$ points sur une bande de fréquence normalisée allant de $-1/2$ à $+1/2$):

```
variance=sum(psd(x,128,1,ones(1,128)))/128*2 % à partir du périodogramme moyenné
```

⁸ On spécifie ici une valeur unitaire pour la fréquence d'échantillonnage, ce qui revient à travailler en (vraie) fréquence normalisée. Les affichages se feront donc pour des valeurs de F entre 0 et $1/2$.

variance = 3.9154

Dans l'expression précédente, on a multiplié l'intégrale par 2, puisque `psd` renvoie $NFFT/2$ points entre $F=0$ et $F=1/2$.

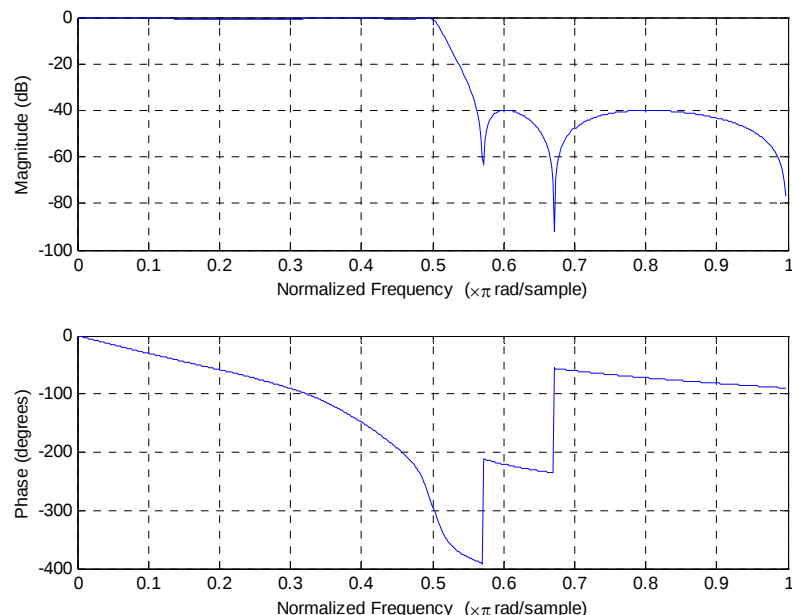
Exemple 5.15 – Bruit coloré

On construit un bruit coloré par filtrage du bruit blanc de l'exercice précédent. Ce bruit est analysé par différentes méthodes (Fig. 5.26) qui montrent l'influence du nombre de points, du nombre de tranches dans le cas du périodogramme moyenné ainsi que du nombre de valeurs de la fonction d'autocorrélation utilisées dans le cas de l'estimateur adouci.

```
x=2*randn(1,512) ; % 512 échantillons d'un bruit blanc gaussien (0,2)
[N,Wh]=ellipord(0.5,0.6,1,40);
[B,A]=ellip(N,1,40,Wh); % synthèse d'un filtre passe-bas9
freqz(B,A) % vérifier la réponse en fréquence du filtre
xf=filter(B,A,x) ; % filtrage

subplot(2,2,1) ; psd(xf(1:128),128,1,ones(1,128)); % périodogramme simple
subplot(2,2,2) ; psd(xf,512,1,ones(1,512)); % périodogramme simple
subplot(2,2,3) ; psd(xf,128,1,ones(1,128)); % périodogramme moyenné
phi=xcorr(xf,'biased') ;
phiad=phi(512-64:512+64).*blackman(129)';
psdad=10*log10(abs(freqz(phiad,1,129)));
%abs : éliminer les composantes imag. résiduelles
subplot(2,2,4) ; plot((0:128)/256,psdad); grid; % périodogramme adouci
xlabel('Frequency');ylabel('Power Spectral Magnitude (dB)');

subplot(2,2,1) ;ax=axis ; subplot(2,2,2) ;axis(ax);
subplot(2,2,3) ;axis(ax); subplot(2,2,4) ;axis(ax); % axes identiques
```



⁹ La synthèse de filtres numériques fait l'objet d'un chapitre ultérieur.

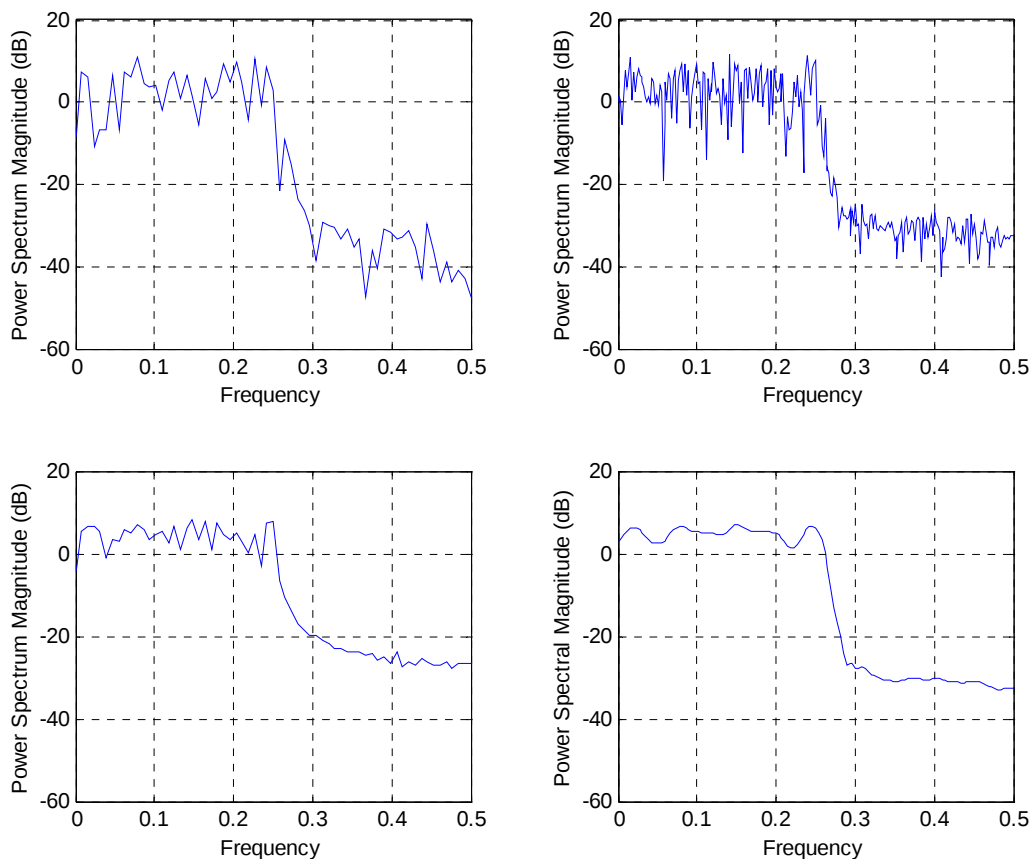


Fig. 5.26 Estimateurs d'un bruit coloré.
 (haut) Réponse en fréquence du filtre
 (milieu gauche) périodogramme simple ($N=128$)
 (milieu droite) périodogramme simple ($N=512$)
 (bas gauche) périodogramme moyenné ($N=512; L=4$)
 (bas droite) estimateur adouci ($N=512; M=64$)

De même, la variance (ici à peu près 2) peut être calculée sur la psd estimée :

```
variance=sum(psd(xf,128,1,ones(1,128)))/128*2 % périodogramme moyenné
variance = 1.8313
```

Exemple 5.16 – Cisoïde

Le cas de la cisoïde d'amplitude A est particulier : sa fonction d'autocorrélation est un cosinus d'amplitude $A^2/2$, et sa densité spectrale de puissance devrait donc faire apparaître deux impulsions de Dirac d'amplitude $A^2/4$.

Comme le périodogramme, le périodogramme modifié, et le périodogramme moyenné calculent la densité spectrale de puissance comme le carré d'une TFD divisé par N (voir par exemple (5.72)), ils sont soumis aux mêmes artifices que pour le calcul de la TFD d'une cisoïde : ils font apparaître, en lieu et place des impulsions de Dirac attendues, le carré des spectres des fonctions fenêtres, divisés par N , et multiplié par $A^2/4$. Dans le cas du périodogramme simple, l'amplitude du lobe principal vaut $A^2/4$ multiplié par un coefficient $N^2/N=N$. Pour le périodogramme modifié, le coefficient multiplicatif vaut :

$$\frac{1}{NP} \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2 = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2 \right)} \quad (5.83)$$

Pour le périodogramme moyenné, le coefficient multiplicatif prend la même expression que (5.77) où l'on remplace N par M , le nombre de points dans chaque tranche.

L'estimateur adouci adouci procède par contre par fenêtrage direct de la fonction d'autocorrélation (et non du signal). Les impulsions de Dirac attendues apparaissent donc comme le spectre de la fonction fenêtre multiplié par $A^2/4$. L'amplitude du lobe principal vaut donc $A^2/4$ multiplié par un coefficient :

$$\sum_{n=-M}^M w(n) \quad (5.84)$$

On peut vérifier tout ceci facilement sous Matlab.

```
x= 10*cos(2*pi*1/10*(0:511)+pi/5) ;
% 512 échantillons d'un cosinus à Fe/10, d'amplitude 10 et de phase initiale pi/5

subplot(2,2,1) ; psd(x(1:128),128,1,ones(1,128)); % périodogramme simple
subplot(2,2,2) ; psd(x,512,1,ones(1,512)); % périodogramme simple
subplot(2,2,3) ; psd(x,128,1,hamming(128)); % périodogramme moyenné
phi=xcorr(x,'biased') ;
phiad=phi(512-64:512+64).*blackman(129)';
psdad=10*log10(abs(freqz(phiad,1,129)));
%abs : éliminer les composantes imag. résiduelles
subplot(2,2,4) ; plot((0:128)/256,psdad); grid; % périodogramme adouci
xlabel('Frequency');ylabel('Power Spectral Magnitude (dB)');

subplot(2,2,2) ;ax=axis ; subplot(2,2,1) ;axis(ax);
subplot(2,2,3) ;axis(ax); subplot(2,2,4) ;axis(ax); % axes identiques
```

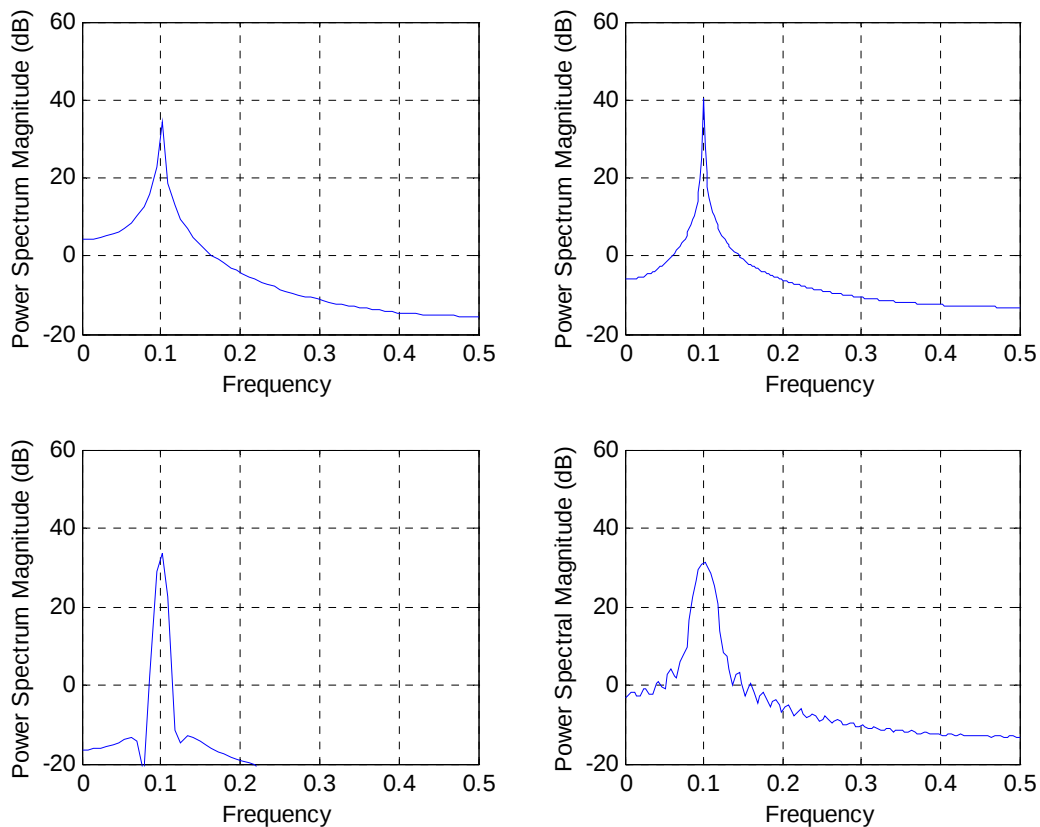


Fig. 5.27 Estimateurs de la densité spectrale de puissance d'une cisoïde d'amplitude 10 et de fréquence $F=Fe/10$.
 (haut gauche) périodogramme ($N=128$)
 (haut droite) périodogramme ($N=512$)
 (bas gauche) périodogramme moyenné ($N=512$; $L=4$; fen. de Hamming)
 (bas droite) estimateur adouci ($N=512$; $M=64$; fenêtre de Blackman)

On retrouve bien les valeurs maximales attendues :

- Périodogramme simple (128) : $10\log_{10}(NA^2/4)=10\log_{10}(25*128)=35$ dB
- Périodogramme simple (512) : $10\log_{10}(25*512)=41$ dB
- Périodogramme moyenné (128 ; hamming) :

$$10\log_{10}\left(A^2/4 * \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)\right)^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2\right)}\right) = 10 * \log_{10}(25 * 93.4) = 33.6 \text{ dB}$$

- Estimateur adouci : $10 * \log_{10}(A^2/4 * \sum_{n=-M}^M w(n)) = 31.3$ dB

Ici aussi la variance (ici 50, puisque la densité spectrale de puissance théorique est constituée de deux raies de valeur 25) peut être calculée sur la psd estimée :

```
variance=sum(psd(x,128,1,hamming(128)))/128*2 % périodogramme moyenné
variance = 49.9994
```

Exemple 5.17 – Cisoïdes dans du bruit blanc

Voyons enfin le cas d'une cisoïde d'amplitude 10 contaminée par un bruit blanc (d'écart-type 20). Les deux signaux étant non corrélés, leurs densités spectrales de puissance s'additionnent. La Fig. 5.28 montre à nouveau bien l'influence du choix de l'estimateur et de ses paramètres.

```
x=10*randn(1,512)+10*cos(2*pi*1/10*(0:511));
    % 512 échantillons d'un bruit blanc gaussien (0,sqrt(10)) + cisoïde

subplot(2,2,1) ; psd(x(1:128),128,1,ones(1,128)); % périodogramme simple
subplot(2,2,2) ; psd(x,512,1,ones(1,512)); % périodogramme simple
subplot(2,2,3) ; psd(x,128,1,ones(1,128)); % périodogramme moyenné
phi=xcorr(x,'biased') ;
phiad=phi(512-128:512+128).*blackman(257)';
psdad=10*log10(abs(freqz(phiad,1,256)));
    %abs : éliminer les composantes imag. résiduelles
subplot(2,2,4) ; plot((0:255)/512,psdad); grid; % périodogramme adouci
xlabel('Frequency');ylabel('Power Spectral Magnitude (dB)');

subplot(2,2,1) ;ax=axis ; subplot(2,2,1) ;axis(ax);
subplot(2,2,3) ;axis(ax); subplot(2,2,4) ;axis(ax); % axes identiques
```

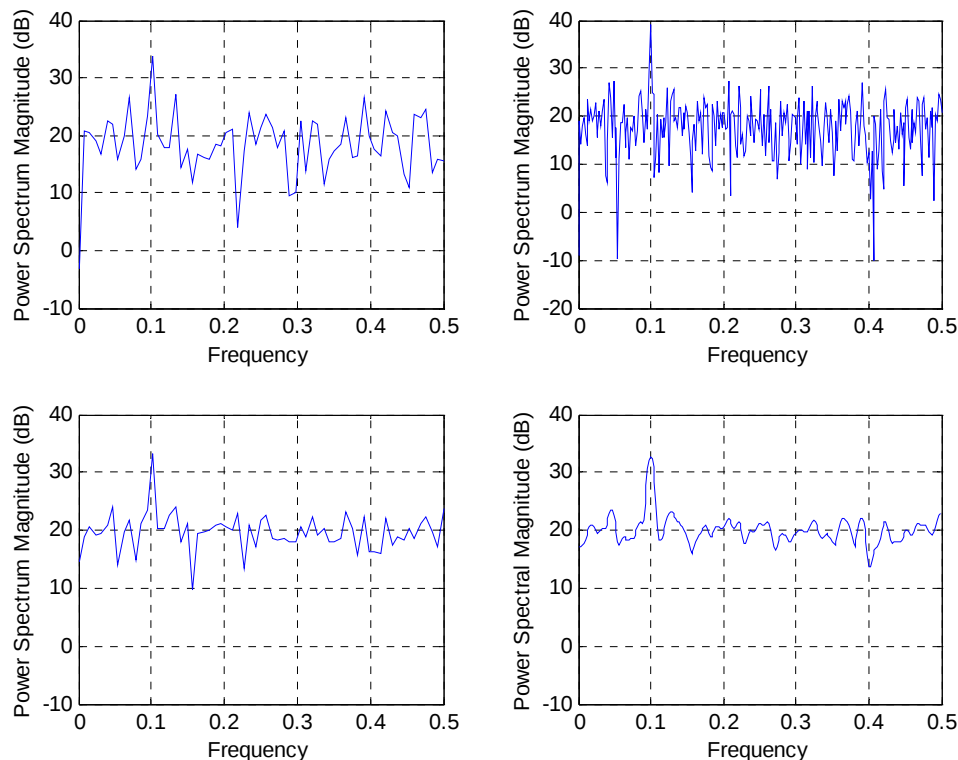


Fig. 5.28 Estimateurs de la densité spectrale de puissance d'un bruit de variance 100 superposé à une cisoïde d'amplitude 10.

(haut gauche) périodogramme ($N=128$)

(haut droite) périodogramme ($N=512$)

(bas gauche) périodogramme moyenné ($N=512$; $L=4$)

(bas droite) estimateur adouci ($N=512$; $M=128$;
fenêtre de Blackman)

5.4.4 Estimation paramétrique de la densité spectrale de puissance

Plutôt que d'estimer la densité spectrale de puissance directement sur le signal inconnu, il peut être intéressant de passer par un modèle paramétrique. En pratique, cela revient à modéliser le signal inconnu comme la sortie d'un filtre. On obtient différents types d'estimations, selon qu'on cherche à reconnaître, dans le signal inconnu, les attributs d'un signal aléatoire à moyenne mobile (MA), d'un signal autorégressif (AR), ou d'un signal autorégressif à moyenne mobile (ARMA).

Estimation MA

Pour créer un signal MA (Fig. 5.19) de densité spectrale de puissance imposée, on peut chercher à égaler la fonction d'autocorrélation $\varphi_{YY}(k)$ à celle du bruit désiré. Le calcul des coefficients du filtre n'est pas cependant pas simple. On sait en effet que la réponse impulsionnelle d'un tel filtre est donnée par le suite de ses coefficients. Comme $\varphi_{XX}(k) = \sigma_X^2 \delta(k)$, on voit par (5.43) que $\varphi_{YY}(k) = \sigma_X^2 \varphi_{HH}(k)$:

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= \varphi_{YY}(0) = \sigma_X^2 \sum_{i=0}^M b_i^2 \\ \varphi_{YY}(1) &= \sigma_X^2 (b_0 b_1 + b_1 b_2 + \dots + b_{M-1} b_M) \\ &\dots \\ \varphi_{YY}(M) &= \sigma_X^2 (b_0 b_M) \\ \varphi_{YY}(k > M) &= 0\end{aligned}\tag{5.85}$$

On identifie alors $\varphi_{YY}(k)$ ($k=0..M$) dans (5.85) aux $M+1$ première valeurs de la fonction d'autocorrélation du signal à modéliser. Les équations (5.85) forment ainsi un système de $M+1$ équations *non linéaires* à $M+1$ inconnues (les b_i), qu'on ne peut résoudre qu'itérativement.

Estimation Autorégressive (AR)

Supposons que le cherche à identifier un signal AR (Fig. 5.20) à un signal aléatoire inconnu. Cette fois, la réponse impulsionnelle n'est plus donnée par le suite des coefficients du filtre. On peut par contre calculer facilement l'expression de la fonction d'autocorrélation du signal AR :

$$\varphi_{YY}(k) = \varphi_{YY}(-k) = E[Y(n)Y(n-k)]\tag{5.86}$$

Puisqu'on a :

$$y(n) = \sum_{i=1}^p -a_i y(n-i) + \sigma u(n)\tag{5.87}$$

Il vient :

$$\varphi_{YY}(k) = E \left[\sum_{i=1}^p -a_i Y(n-i)Y(n-k) \right] + E \left[\sum_{i=1}^p \sigma U(n)Y(n-k) \right] \quad (5.88)$$

Dans cette dernière expression, le second terme est nul pour $k > 0$ (il ne peut pas y avoir de corrélation entre l'entrée du filtre et des sorties précédentes). Il vient donc :

$$\varphi_{YY}(k) = \sum_{i=1}^N -a_i \varphi_{YY}(k-i) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (5.89)$$

Pour $k=0$, l'expression (5.88) devient :

$$\begin{aligned} \varphi_{YY}(0) &= \sum_{i=1}^N -a_i \varphi_{YY}(i) + \sigma^2 \varphi_{UU}(0) \\ &= \sum_{i=1}^N -a_i \varphi_{YY}(i) + \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.90)$$

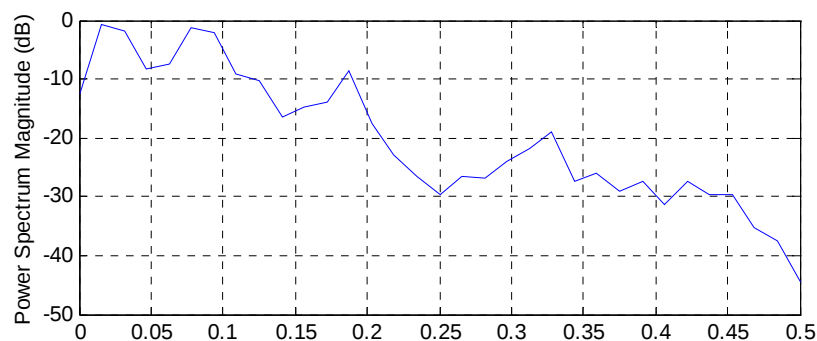
puisque $u(n)$ est un bruit blanc.

Il suffit alors, pour identifier le signal inconnu au signal AR, d'identifier leurs fonctions d'autocorrélation pour des indices $0 \dots N$. Le système d'équations linéaires (5.89) permet alors de calculer les a_i . L'équation (5.90) permet quant à elle de régler la valeur de σ . Ces équations portent le nom d'*équations de Yule-Walker*. Leur linéarité permet donc de générer facilement un signal AR dont les N premières valeurs de la fonction d'autocorrélation sont imposées. Ceci revient, par transformée de Fourier, à imposer l'allure globale de la densité spectrale de puissance (son *enveloppe spectrale*). Cette avantage est très utilisé dans des applications pratiques (par exemple la modélisation AR est utilisée en transmission de parole par GSM).

Exemple 5.18 – Signal de parole

On cherche à estimer par un modèle AR la densité spectrale de puissance de 30 ms d'un « a » échantillonné à 8000 Hz. Matlab fournit une fonction qui réalise l'estimation AR, par résolution des équations de Yule-Walker : `lpc(x,N)` où x est le vecteur des échantillons du signal aléatoire, et N est l'ordre du modèle.

```
x=wavread('par8.wav',[500,739]);
% 240 échantillons du « a » de « parenthèse »
psd(x,64,1,ones(1,64)); % périodogramme moyenné
[ai,sigmasq]=lpc(x,10); %retourne les ai et la valeur de sigma²
figure(2)
freqz(sqrt(sigmasq),ai,256); % visualiser la densité spectrale de puissance modélisée
```



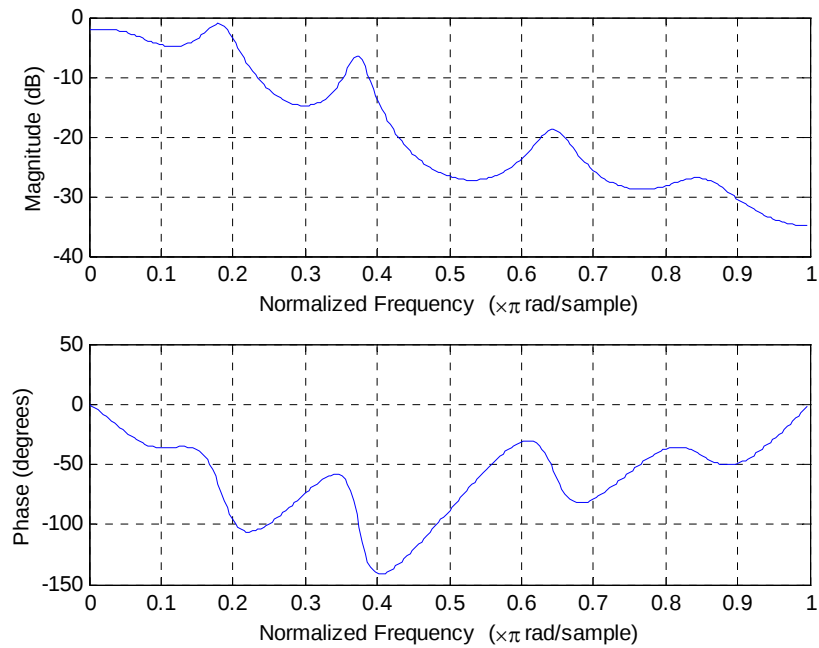


Fig. 5.29 Estimateurs de la densité spectrale de puissance d'une voyelle (240 échantillons).
 (haut) périodogramme moyenné ($N=192$; $L=3$)
 (bas) estimateur AR ($N=10$) : amplitude et phase.

L'estimateur AR résume, dans les 10 valeurs de ses coefficients a_i , l'allure de la densité spectrale de puissance du signal. L'estimation paramétrique permet souvent d'obtenir de bons résultats, même lorsque le nombre d'échantillons du signal est faible.

Estimation ARMA

On montre que les équations reliant la fonction d'autocorrélation du signal ARMA aux coefficients du filtre sont fortement non-linéaires. Leur résolution nécessite donc la mise en œuvre d'un algorithme itératif.